Paradoxe du Duc de Toscane

Introduction

A la cour de Florence, un jeux de société faisait intervenir la somme des numéros sortis lors du lancer de trois dés. Le Duc de Toscane avait remarqué que la somme 10 était obtenue légèrement plus souvent que la somme 9. Le Duc est intrigué par cette observation car il constate qu'il y a autant de façons d'écrire 10 que 9 comme sommes de trois entiers compris entre 1 et 6 :

$$10 = 6 + 3 + 1 \quad ; \quad 10 = 6 + 2 + 2 \quad ; \quad \ldots \quad \text{(6 décompositions)}$$

$$9 = 6 + 2 + 1 \quad ; \quad 9 = 5 + 3 + 1 \quad ; \quad \ldots \quad \text{(6 décompositions)}$$

Le Duc de Toscane demande à Galilée d'élucider ce paradoxe. Galilée rédigea vers 1620 un mémoire sur les jeux de dés pour répondre à la demande du Duc de Toscane.

On considère l'expérience aléatoire consistant à lancer trois dés discernables équilibrés et à noter la somme des faces obtenues.

Partie A Simulation sur tableur

1. Reproduire la feuille de calcul ci-dessous :

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
1	dé 1	dé 2	dé 3	somme		
2						
3					fréq 9 :	
4					fréq 10 :	
5						
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1001						

2. En utilisant judicieusement les formules $= ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)$ et $= SOMME(A2 : C2)$ réaliser une simulation de 1000 expériences.

3. Dans les cellules $F3$ et $F4$, saisir une formule permettant de calculer la fréquence observée de la somme 9 et de la somme 10. Utiliser la formule $= NB.SI(D2 : D1001; 9)$

4. On a regroupé dans le tableau ci-dessous les observations de 10 élèves :

Fréq 9	0,110	0,122	0,108	0,115	0,101	0,126	0,121	0,110	0,115	0,116
Fréq 10	0,129	0,118	0,134	0,127	0,140	0,121	0,123	0,118	0,134	0,114

   Commenter ces observations :

   ....

   ....

5. Comment pourrait-on obtenir des observations plus décisives ?

   ....

   ....

PARTIE B Simulation à l'aide d'un programme Python

Dans cette partie, nous allons réaliser un programme Python permettant de simuler l'expérience aléatoire 100 000 fois.

1. Compléter et saisir le programme ci-dessous :

```
from random import randint

def toscane(n):     # Le paramètre n correspond au nombre de lancers

    compteurneuf=0
    compteurdix=0

    for i in range(n) :
        d1= ...........
        d2= ...........
        d3= ...........
        s= ........       # Calcul de la somme des 3 dés
        if s==9:
            .........................
        if s==10:
            .........................
    return "Fréquence du 9:",compteurneuf/n,"Fréquence du 10:",compteurdix/n
```

2. Exécuter 10 fois ce programme et compléter le tableau ci-dessous en arrondissant au millième :

Fréq 9										
Fréq 10										

3. Conclure :. ....

PARIE C Calcul des probabilités

1. On considère l'expérience consistant à lancer trois dés discernables équilibrés et à noter la somme des faces obtenues. On associe à chaque issue de l'expérience un triplet ordonné $(a; b; c)$ où a, b et c sont des entiers de 1 à 6. Calculer le cardinal de l'univers des possibles de cette expérience aléatoire.

   ....

2. On dénombre 6 issues équiprobables correspondant à la somme $1+3+6=10$. Compléter le tableau et calculer la probabilité d'obtenir une somme égale à 10.

   ....

6 issues pour $1+3+6=10$			6 issues pour $1+4+5=10$			3 issues pour $2+2+6=10$			... issues pour $2+3+5=10$			... issues pour $2+4+4=10$			... issues pour $3+3+6=10$		
d1	d2	d3	d1	d2	d3	d1	d2	d3	d1	d2	d3	d1	d2	d3	d1	d2	d3
1	3	6	1	4	5	2	2	6									
1	6	3	1	5	4	2	6	2									
3	1	6	4	1	5	6	2	2									
3	6	1	4	5	1												
6	1	3	5	1	4												
6	3	1	5	4	1												

(On montre de la même façon que la probabilité d'obtenir une somme égale à 9 vaut : $\frac{25}{216}$)

3. Conclure : ....