

Nom de famille (naissance) :

(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'épouse/époux)

GUILLET ZHANG

Prénom(s) :

CLARA ALEXANDRE

N° d'inscription :

Né(e) le :

28 / /

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)

(Remplir cette partie à l'aide de la notice)

Concours / Examen : Olympiades maths

Section/Sécialité/Série :

1<sup>ère</sup> S

Epreuve : Groupe

Matière : Maths

Session : 2018

## CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroter chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleu ou noir) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

Dans l'ensemble  
c'est du très bon  
travail surtout  
pour l'exercice n°2 (26)

## Exercice 1

1. On peut faire ses enchères maximum.  
Quand un joueur annonce que la valeur de son dé est supérieur ou égal à 6, la partie s'arrête car on ne peut plus surenchérir.

2. a) L'ordinateur dit la vérité en premier. Si le deuxième joueur doute, l'ordinateur gagne. Si le deuxième joueur surenchérit, il décide de continuer à surenchérir avec l'entier suivant, ce jusqu'à ce que la partie s'arrête.

c) Pour gagner à coup sûr, il faut surenchérir en disant la vérité puis douter de l'ordinateur au deuxième tour.

3.

i	1	2	3	4	5	6
$p(E_1=i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{3}{60}$	$\frac{1}{6} \times \frac{7}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{20}{60}$	$\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{15}{60}$	$\frac{1}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{12}{60}$	$\frac{1}{6} = \frac{10}{60}$

$$p(E_1=1) = \frac{1}{6}$$

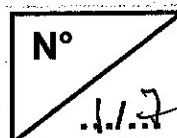
$$p(E_1=2) = \frac{3}{60}$$

$$p(E_1=3) = \frac{20}{60}$$

$$p(E_1=4) = \frac{15}{60}$$

$$p(E_1=5) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$$

$$p(E_1=6) = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$$



4. a.  $E_1 = 5$   $\begin{cases} \frac{8}{10} \text{ VRAI} \\ \frac{2}{10} \text{ FAUX} \end{cases}$

Ben a  $\frac{2}{10}$  soit  $\frac{1}{5}$  de chance de gagner s'il doute

de cette enchère  $E_1 = 5$ .

La probabilité que Ben gagne s'il surenchérit est de  $\frac{1}{6}$  car Ben annonce la vérité dès le premier tour.

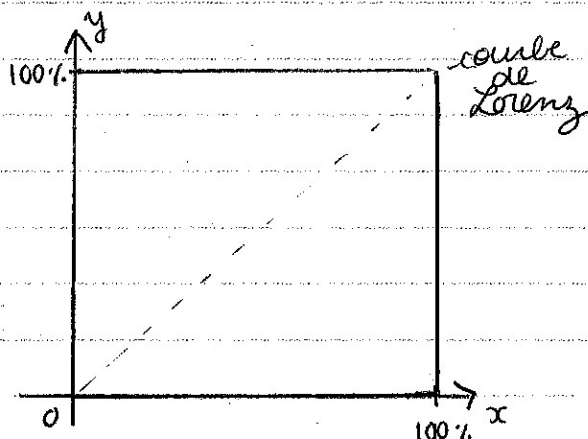
Les enchères obtenues ultérieurement ne sont pas la valeur du dé qu'il a obtenu, donc ce sont tous des mensonges. Mais peut totalement gagner car elle ne peut que doubler (Ben surenchérit à 6, on ne peut plus continuer). Sauf dans le cas où Ben obtient 6 au lancer du dé.

b.

Exercice 2

1. La diagonale du carré symbolise la proportionnalité (fonction linéaire passant par l'origine). Donc, chacun a la même part : c'est une égalité parfaite.

2



3. Parce que les individus sont classés du plus pauvre au plus riche, la courbe croît donc de plus en plus en fonction de  $x$  et ne peut pas se situer entièrement au-dessus de la diagonale (cas où elle aurait besoin de ralentir).

4. Les coordonnées sont définies par des part cumulée qui vont donc constamment augmenter; la courbe de Lorenz est donc forcément une fonction croissante.

Coefficient de Gini

1. a. En cas d'égalité parfaite,  $G=0$   
 b. En cas d'inégalité complète  $G=1$ .

2. On considère que l'égalité  $G=2A=1-2B$  est vraie

ainsi :  $2A = 1 - 2B$

$$2A + 2B = 1$$

$$A + B = \frac{1}{2}$$

$$\text{On } G = \frac{A}{A+B} = \frac{2A}{2(A+B)}$$

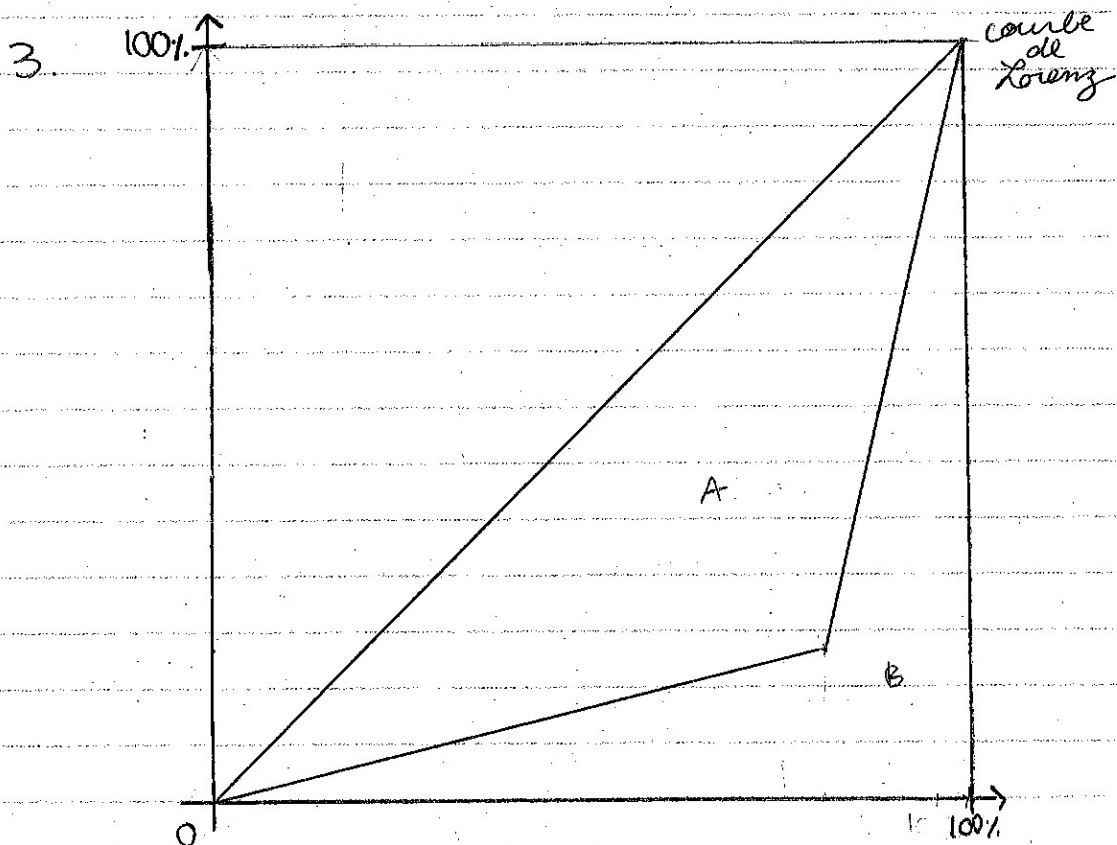
$$\text{donc } \frac{2A}{2 \times \frac{1}{2}}$$

$$= 2A$$

Donc l'égalité est effectivement vraie ✓

D'après la valeur de  $G$  calculée pour les deux situations extrêmes  $G = 0$  et  $G = 1$ .

$$\text{Donc } 0 \leq G \leq 1. /$$



Calculons  $A$  et  $B$  en fonction de l'échelle  
10% vaut 1 cm.

$$\text{Ainsi, } B = 2 \left( \frac{2 \times 8}{2} \right) + 2^2 = 20 \text{ cm}^2$$

$$A = \frac{10 \times 10}{2} - 20 = 30 \text{ cm}^2$$

Donc,

$$G = \frac{A}{A+B} = \frac{30}{30+20} = \frac{3}{5}$$

Nom de famille (naissance) :  
(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'épouse/époux)

GUILLET - ZHANG

Prénom(s) :

CLARA - ALEXANDRE

N° d'inscription :

Né(e) le :

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)

(Remplir cette partie à l'aide de la notice)

Concours / Examen : Olympiades...

Section/Spécialité/Série : 1<sup>ère</sup> S

Epreuve : en équipe...

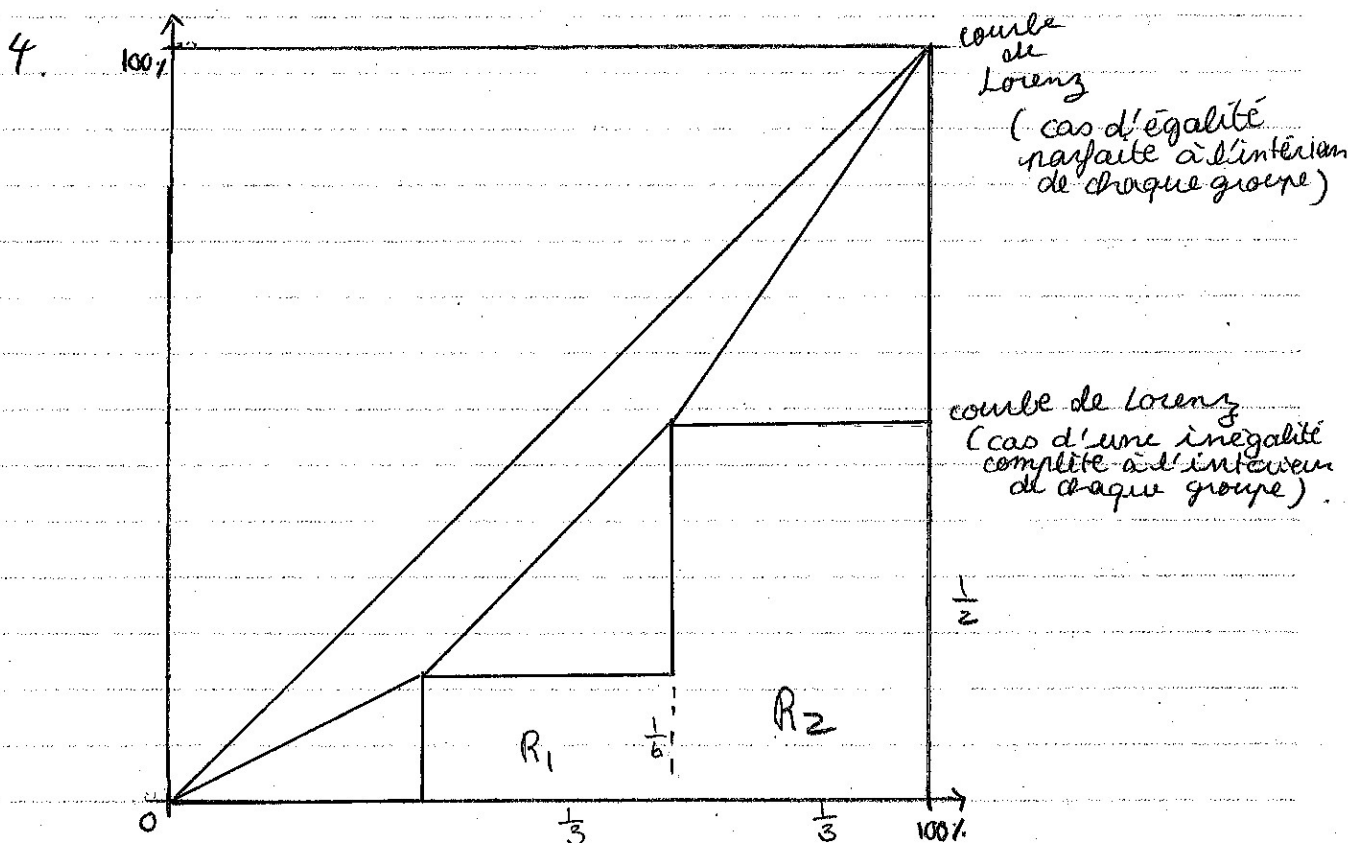
Matière : Maths Session : 2018

## CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroter chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

## Exercice 2 (suite)

## Principe de Pareto



Étudions le cas d'une inégalité complète :

Nous décomposons B en deux rectangles R1 et R2.

$$A_{R1} = L \times l$$

$$A_{R2} = L \times l$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{18}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{6}$$

$$B = \frac{1}{18} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{4}{18}$$

$$= \frac{2}{9}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ensuite } A &= A_{\text{triangle}} - B \\
 &= \frac{1 \times 1}{2} - \frac{2}{9} \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{4}{18} \\
 &= \frac{9}{18} - \frac{4}{18} \\
 &= \frac{5}{18}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Calculons } G: \quad G &= \frac{A}{\frac{5}{18}A + B} \\
 &= \frac{\frac{5}{18}}{\frac{5}{18} + \frac{4}{18}} \\
 &= \frac{\frac{5}{18}}{\frac{9}{18}} \\
 &= \frac{5}{9}
 \end{aligned}$$

Le coefficient de Gini dans le cas où il y a une inégalité complète dans chaque groupe est  $\frac{5}{9}$ .

Étudions le cas d'une égalité parfaite:  
Calculons,

$$\begin{aligned}
 B' &= B + \left( \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{6}}{2} \right) + \left( \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}}{2} \right) + \left( \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{2} \right) \\
 &= \frac{2}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12} \\
 &= \frac{14}{36}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A' &= A_{\text{triangle}} - B' \\
 &= \frac{1 \times 1}{2} - \frac{14}{36} \\
 &= \frac{9}{18} - \frac{7}{18} \\
 &= \frac{2}{18}
 \end{aligned}$$

Calculons  $G_1'$ ,

$$\begin{aligned} G_1' &= \frac{A'}{A'+B'} = \frac{\frac{2}{18}}{\frac{2}{18} + \frac{14}{36}} \\ &= \frac{\frac{2}{18}}{\frac{2}{18} + \frac{7}{18}} \\ &= \frac{2}{18} \times \frac{18}{9} \\ &= \frac{2}{9} \quad / \end{aligned}$$

3

Dans le cas extrême d'une égalité parfaite, le coefficient de Gini est de  $\frac{2}{9}$ .

On en conclut donc que dans une telle situation,

$$\frac{2}{9} \leq G_1 \leq \frac{5}{9} \quad /$$

On a prouvé auparavant que plus  $G_1$  est proche de 0, plus la situation est égalitaire.

Dans la situation de la question 5, au maximum  $G_1 = \frac{5}{9} = \frac{25}{45}$

2

Dans la situation de la question 3,  $G_1 = \frac{3}{5} = \frac{27}{45}$

Comme  $\frac{25}{45} < \frac{27}{45}$ ,

La situation de la question 5 ne peut donc pas être moins égalitaire que celle de la question 3.