

Points de Fermat (réseaux de Steiner)

Aspects physiques

un système physique est en équilibre stable lorsque son énergie potentielle est minimale.



Lorsque la corde élastique est tendue, son énergie potentielle est maximale, après le tir, la corde n'est plus tendue, elle retrouve un état stable, son énergie potentielle est minimale.

Les films de savons se comportent comme un système élastique. La position d'équilibre correspond au minimum d'énergie potentielle (longueur totale de l'élastique minimale).

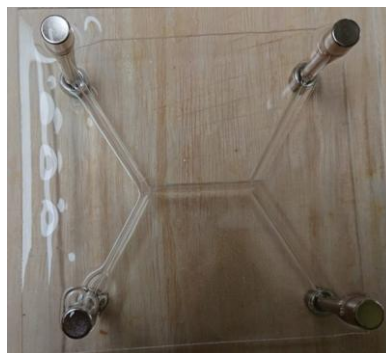
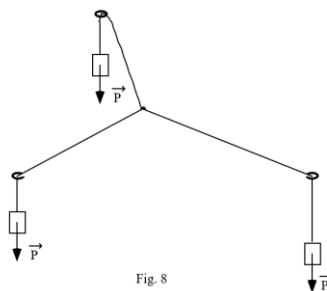


Illustration avec des forces :

Si on fait 3 trous en triangle dans une table horizontale, et que d'un nœud, partent 3 ficelles passant dans les trous aux extrémités desquelles sont suspendues des masses égales, le nœud se stabilise au point de Fermat du triangle des 3 trous. (Formation de trois angles de 120°)



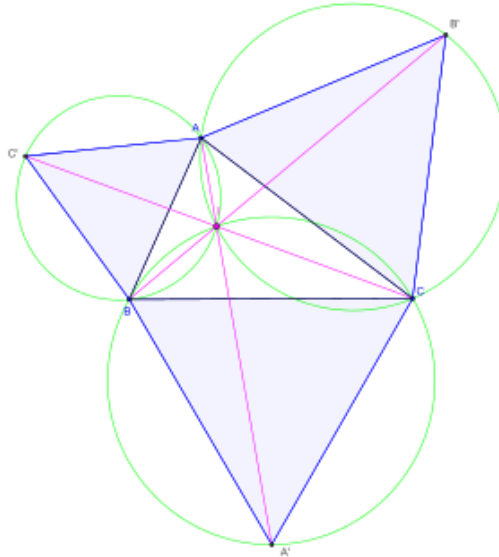
Une position d'équilibre est une position d'énergie minimale. Donc l'équilibre des 3 masses égales se fait lorsque l'énergie potentielle est minimale, c'est-à-dire lorsque les masses sont globalement le plus bas possible, donc lorsque la somme des 3 longueurs de fil intérieures au triangle est minimale.

Aspect mathématique (wikipédia):

Théorème : soit ABC un triangle dont les angles sont inférieurs à 120° . Il existe un et un seul point I, dont la somme $IA + IB + IC$ des distances aux trois sommets est minimale.

Ce point est appelé **point de Fermat** ou point de **Torricelli**.

Construction utilisant trois triangles équilatéraux extérieurs :



Quel que soit le triangle ABC, les cercles circonscrits aux triangles équilatéraux extérieurs

sont concourants. En effet, si I est le second point d'intersection des cercles passant respectivement par BA et CA alors

$$(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IA}) \equiv \pi/3 \pmod{\pi}$$

$$(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}) \equiv \pi/3 \pmod{\pi}$$

donc

$$(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) \equiv (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}) \equiv 2\pi/3 \equiv -\pi/3 \pmod{\pi}$$

le point I est bien alors sur le troisième cercle

Le point I est bien sur les trois droites (BE), (FC) et (AD). En effet

$$(\overrightarrow{IF}, \overrightarrow{IA}) \equiv (\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BA}) \equiv -\pi/3 \pmod{\pi}$$

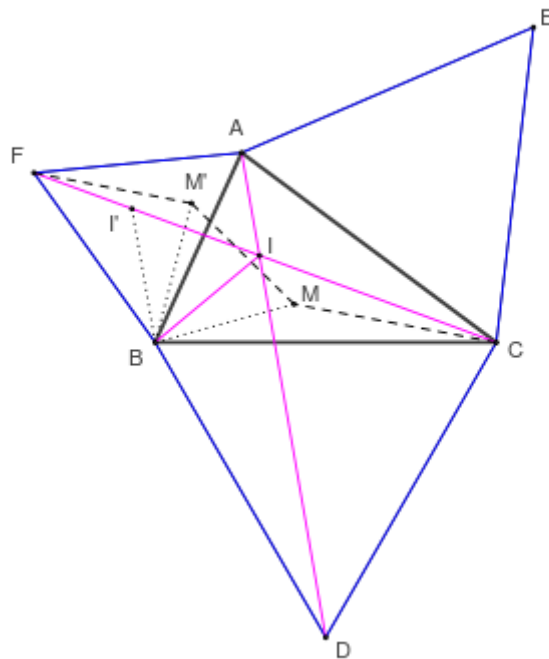
$$(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}) \equiv \pi/3 \pmod{\pi}$$

donc

$$(\overrightarrow{IF}, \overrightarrow{IC}) \equiv (\overrightarrow{IF}, \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}) \equiv 0 \pmod{\pi}$$

Démonstration du théorème :

le point I est bien sur la droite (FC) et par un raisonnement analogue sur les deux autres droites qui forment bien entre elles des angles de 120° .



On considère la rotation de centre B, qui envoie A en F et D en C. Pour tout point M du plan, on appelle M' son image par cette rotation.

La rotation étant une isométrie on a $MA = M'F$, comme le triangle BMM' est équilatéral, on a $BM = M'M$ et la somme $MA + MB + MC$ est égale à la longueur de la ligne polygonale FM'MC.

Si les angles du triangle n'excèdent pas 120° , Le point I étant sur [AD] son image I' par la rotation est sur [FC] et plus précisément sur [FI].

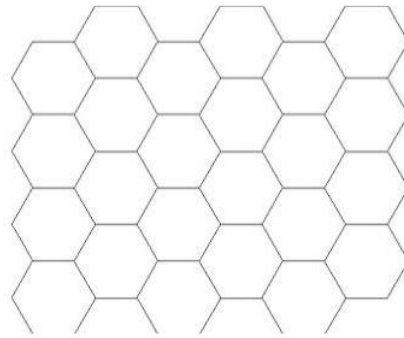
La somme $IA + IB + IC$ est égale à la longueur de la ligne polygonale FI'IC, les points FI'IC étant alignés dans cet ordre, cette longueur vaut FC

Or pour tout point M, la longueur FM'MC est supérieure ou égale à FC donc $MA + MB + MC$ est supérieur ou égal à $IA + IB + IC$. L'inégalité est stricte si M n'est pas sur (FC). Par un raisonnement analogue, l'inégalité est stricte si M n'est pas sur (BE) ou sur (AD). Bref, si M est différent de I, $MA + MB + MC$ est strictement supérieur à $IA + IB + IC$

ce qui prouve que I est l'unique point rendant minimale la somme $IA + IB + IC$.

Applications technologiques :

Le théorème du nid d'abeille énonce que le pavage hexagonal régulier est la partition du plan en surfaces égales ayant le plus petit périmètre.



Ce pavage est intéressant si on souhaite paver une surface donnée en utilisant un minimum de joint.



(Aéroport de Séoul)

Dans la nature :



Alvéoles de ruche



Dessiccation

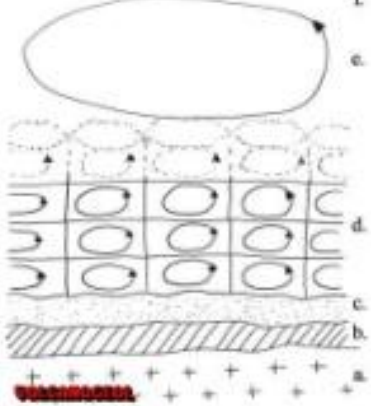


Prismes magmatiques

Cas des alvéoles de ruche : les abeilles ne construisent pas d'angle de 120° , initialement, les alvéoles sont cylindriques et la cire tendre. Le travail musculaire (battements d'ailes) de la colonie d'abeilles produit de la chaleur.

Suite à cette augmentation de température, la cire se comporte comme un gel élastique. Le réseau élastique s'organise alors de façon à atteindre un minimum d'énergie potentielle (périmètre minimal, ce qui explique l'apparition de points de Fermat et les angles de 120° . Ce réseau se maintient après solidification de la cire par déshydratation.

Cas des orgues basaltiques, de la dessiccation (terre craquelée ou lac de sel) :

	<p>Les angles de 120° et les points de Fermat se forment en trois temps :</p> <ul style="list-style-type: none"> -formation de courants de convection suivant des canaux cylindriques (évacuation de la chaleur) -les disques en surface s'assèchent alors qu'aux frontières de ces disques le magma (ou la boue) se comporte comme un gel élastique. L'équilibre du « gel » est atteint pour le minimum d'énergie potentielle, ce qui conduit à la formation de points de Fermat (réseaux de Steiner) - Rétractation consécutive au refroidissement de la matière et propagation du phénomène en profondeur.
-----------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------